

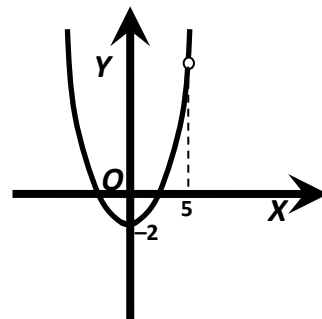
ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ 2024–2025 уч. г.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 10 КЛАСС.

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ.

Задача 1. Нарисуйте график функции $y = \frac{x^3 - 5x^2 - 2x + 10}{x - 5}$

Ответ: см. рис.

Решение. Заметим, что $x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = (x - 5)(x^2 - 2)$. Сократим дробь, не забывая об области определения функции (ОДЗ $x \neq 5$). На области определения это график параболы $y = x^2 - 2$, область определения не должна войти в график. Получаем эскиз графика, а именно параболу с выколотой точкой (на рисунке показана схема, не соблюден масштаб).



Критерии.

Правильный рисунок с обозначением вершины параболы и выколотой точки, без иных пояснений (снимаем 1 балл, так как нет разложения на множители)	6 баллов
На правильном рисунке с выколотой точкой нет обозначения вершины параболы и/или выколотой точки	Снимаем 1 балл
Нет выколотой точки	0 баллов
Арифметические ошибки при разложении на множители и/или нахождении корней, даже приведшие к неправильному ответу	Снимаем 2 балла

Задача 2. Найдите такое наибольшее натуральное число, что если вычеркнуть из него любые цифры, кроме двух, то оставшееся двузначное число будет простым.

Ответ: 4731

Решение. Заметим, что в нашем числе нельзя использовать четные цифры или цифра 5 нигде, кроме первого места, иначе можно вычеркнуть цифры так, чтобы четная цифра или цифра 5 стали последними. Значит, на всех местах, кроме первого, стоят только цифры 1, 3, 7 и 9. Двух одинаковых цифр тоже быть не может, так как тогда можно оставить число, кратное 11. Кроме того, в одном числе не могут встретиться вместе 3 и 9, так как можно оставить эти две цифры, и получится число, кратное 3. Итого искомое число – не более чем четырехзначное.

Если оно четырехзначное, то в нем есть цифры 1, 7 и одна из цифр 3 или 9. Тогда на первом месте не может стоять 8 (иначе можно оставить 81), 6 (можно оставить 63 или 69), 5 (можно оставить 51). Значит, наибольшая возможная первая цифра – это 4.

Но если там стоит 4, то нельзя использовать цифру 9, так как 49 не является простым. Ставим цифры 7, 3 и 1 в порядке убывания и проверяем, что числа 47, 43, 41, 73, 71 и 31 – простые.

Критерии.

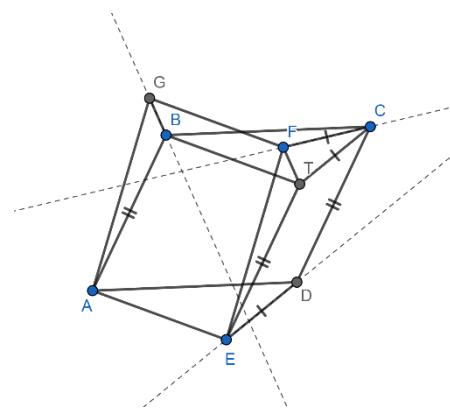
Ответ без обоснования	2 балла
-----------------------	---------

Доказано, что в числе первая цифра – четная или 5	1 балл
Доказано, что число не более чем пятизначное	2 балла
Доказано, что 3 и 9 вместе в одном числе встретиться не могут (само со себе это утверждение стоит 1 балл, и может встретиться независимо от других утверждений)	+1 балл
Доказано, что число не более чем четырехзначное. <i>Утверждение про 3 и 9 обязательно используется в этом доказательстве, поэтому за него 1 балл НЕ ДОБАВЛЯЕТСЯ!</i>	4 балла
При переборе возможной первой цифры потерян какой-то случай	Снимается 1 балл

Задача 3. Параллелограммы $ABCD$ и $AEFG$ расположены на плоскости так, что $DE = CF$. Прямые BG , DE и CF , пересекаясь, ограничивают треугольник. Докажите, что этот треугольник равнобедренный.

Решение. Отметим точку T так, чтобы четырехугольник $ABTE$ являлся параллелограммом. Тогда отрезок BT параллелен и равен отрезку AE , а значит, параллелен и равен отрезку GF . Тогда $BTFG$ – параллелограмм, и TF параллелен BG . Кроме того, отрезок AB параллелен и равен отрезку TE , а значит, отрезок TE параллелен и равен отрезку CD , поэтому $TCDE$ – тоже параллелограмм, откуда TC параллельно и равно ED , а значит, равно CF .

Рассмотрим треугольник TCF . В нем стороны параллельны прямым BG , DE и CF , а значит, все углы равны треугольнику, ограниченному прямыми BG , DE и CF . Следовательно, треугольник TCF подобен искомому треугольнику. Но треугольник TCF равнобедренный, так как $TC=TF$.



Критерии.

Возможно решение через вектора!

Чертеж с правильным дополнительным построением без иных продвижений	4 балла
---	---------

Задача 4. Школьников награждали за успешное выступление на олимпиадах по физике, химии и математике, при этом каждый школьник участвовал ровно в одной олимпиаде (так как они проходили в один день). При этом по математике дипломы I степени получили 10% участников, а дипломы II степени – 20% участников, по физике I диплом – 20%, II диплом не получил никто, по химии I диплом – 5% и II диплом – 25% участников. Всего дипломами I степени оказалось награждено 12% от общего числа олимпиадников. Найдите, какой процент олимпиадников награжден дипломами II степени (укажите наибольшее и наименьшее возможное значение).

Ответ: от $13\frac{1}{3}\%$ до 16%.

Решение. Пусть всего участников по математике x , по физике y , а по химии z . Тогда из соотношения первых дипломов получаем, что $10x + 20y + 5z = 12x + 12y + 12z$, откуда $2x + 7z = 8y$ (*). Пусть вторыми дипломами награждено $N\%$ участников. Тогда $20x + 25z = Nx + Ny + Nz$, подставив (*), получим

$20x + 25z = \frac{5N}{4}x + \frac{15N}{8}z$, откуда $(20 - 1,25N)x = (1,875N - 25)z$, а так как x и z числа натуральные, то значения выражений в скобках должны иметь одинаковый знак, т.е. $(20 - 1,25N)(1,875N - 25) \geq 0$, откуда следует ответ. Очевидно, что при минимальном и максимальном значении N соответствующие значения x и z легко подбираются, так как N — рациональное число.

Критерии.

Ответ без обоснования (обе границы)	2 балла
Ответ без обоснования (либо только верхняя, либо только нижняя граница)	1 балл
Не приведен пример и даже не упоминается, что его легко привести	Баллы не снимаются
Получено равенство (*)	2 балла
Арифметические ошибки, не повлиявшие на ход решения, но, возможно, приведшие к неверному ответу	Снимаем 1 балл
Обоснованно найдена только одна граница, верхняя или нижняя	3 балла

Задача 5. В стране 30 городов, один из которых — столица. Турфирма составила все возможные автобусные туры, которые из города A ведут сначала в нестоличный город B , а потом в столицу. Для каждого города, кроме столицы, получилось ровно 5 таких туров. Докажите, что в стране есть город, из которого выходит нечетное число дорог.

Автобусы могут ездить только по дорогам между городами, любые два города либо соединены одной дорогой, либо не соединены дорогой.

Решение 1. Заметим, что из каждого города можно доехать в столицу либо напрямую, либо через другой город. Назовем города ближними, если они соединены со столицей дорогой, и дальними, если не соединены. Заметим, что каждый дальний город соединен с 5 ближними городами, каждый ближний — тоже с 5 ближними. В сумме ближних и дальних городов 29.

Если ближних городов нечетное число, то из столицы выходит нечетное число дорог, и задача решена. Если количество ближних городов четно, то дальних — нечетное число. Из каждого дальнего города к ближнему выходит по 5 дорог, значит, всего дорог между дальними и ближними городами нечетное количество. Тогда из какого-то ближнего города A к дальним ведет нечетное число дорог.

Рассмотрим город A . От него ведет одна дорога к столице, 5 дорог к каким-то другим ближним городам и нечетное количество дорог к дальним городам. Итого в сумме из него выходит нечетное число дорог.

Решение 2. Снова разделим города на ближние и дальние. Пусть все города — четные. Так как из каждого дальнего города ведет по 5 дорог в ближние, то тогда из каждого дальнего города в другие дальние города ведет нечетное число дорог. Но тогда дальних городов — четное число (иначе подграф из дальних городов имеет нечетное число нечетных вершин). Значит, ближних городов — нечетное число (так как их в сумме с дальними 29), а значит, искомый город — это столица.

Критерии.

Идея разделения всех городов на два типа — дальние и ближние	2 балла
--	---------