

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ 2024–2025 уч. г.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 11 КЛАСС.

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ.

Задача 1. Можно ли натуральные числа от 1 до 100 разбить на три группы так, чтобы каждые два числа, отличающиеся на 2, 3 или 5, лежали в различных группах?

Ответ. Нельзя.

Решение. Предположим, мы разбили числа на три группы А, Б, В. Так как 1, 3 и 6 должны лежать в попарно различных группах, можно считать, что они лежат в А, Б и В соответственно. Тогда 4 может лежать только в Б. Числа 2 (из-за того, что там 4), 5 (из-за того, что там 3) и 7 (из-за того, что там 4) не могут попасть в Б. Значит, по крайней мере два из них попадают в одну группу. Но $5 - 2 = 3$, $7 - 5 = 2$, $7 - 2 = 5$, получаем противоречие.

Критерии.

Ответ без обоснования	0 баллов
Приведены примеры троек чисел, которые должны находиться в трех разных группах (например, 1, 3, 6 или 2, 5, 7)	1 балл

Задача 2. На каждом этаже многоэтажного дома – по одинаковому числу квартир (более одной). Лена, живущая в 87-й квартире, перестукивается через стенку со Светой из 127-й. На каком этаже они живут?

Известно, что все планировки всех подъездов одинаковы, первые этажи не заняты ничем, кроме квартир. Если подъезд не крайний, то на каждом этаже ровно две квартиры имеют общую стенку с квартирами из соседних подъездов – одна граничит с квартирой из подъезда с меньшим номером, а другая – с большим номером.

Ответ: на первом этаже.

Решение. Квартира 87 – последняя на своем этаже, а квартира 127 – первая на своём. Значит, предыдущий этаж заканчивается квартирой 126. Количество квартир на этаже — делитель чисел 87 и 126. НОД (87, 126) = 3, поэтому на каждом этаже по три квартиры. Тогда в одном подъезде этаж, где живут девочки, заканчивается 87 квартирой, а в другом подъезде – 129 квартирой. Тогда один подъезд – это $129 - 87 = 42$ квартиры, значит, в доме $42 : 3 = 14$ этажей. В первых двух подъездах 84 квартиры, значит, квартира 87 находится на первом этаже третьего подъезда.

Критерии.

Ответ без обоснования	1 балл
Ответ без обоснования единственности, но с примером, откуда видно, что это первый этаж третьего подъезда	2 балла
Правильно определено и обосновано количество квартир на этаже, далее продвижений нет	3 балла
Арифметические ошибки при правильном ходе решения	Снимаем 2 балла

Задача 3 Известно, что приведённые квадратные трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что $P(Q(x)) = (x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 7)$. Найдите абсциссу вершины параболы, являющейся графиком трёхчлена $Q(x)$ (найдите все варианты и докажите, что других нет).

Ответ: $x_0 = 4$.

Решение. Подставив в выражение вместо x числа 1, 3, 5, 7 получим, что $Q(1)$, $Q(3)$, $Q(5)$ и $Q(7)$ — корни $P(x)$. Поскольку квадратный трёхчлен $P(x)$ имеет не более двух корней, то числа $Q(1)$, $Q(3)$, $Q(5)$ и $Q(7)$ разбиваются на две пары равных чисел. Аргументы, в которых квадратный трёхчлен принимает одинаковые значения, должны быть симметричны относительно абсциссы вершины параболы, получаем, что абсцисса вершины $Q(x)$ равна 4.

Подойдут $P(x) = (x + 7)(x + 15)$, $Q(x) = x^2 - 8x = x(x - 8)$.

Критерии.

Пример в решении приведен для общих сведений, участникам не обязательно приводить пример!

Возможно решение с помощью метода неопределённых коэффициентов

Ответ без обоснования	2 балла
При использовании метода неопределённых коэффициентов сделаны арифметические ошибки	Снимаем 2 балла
Есть примеры многочленов, нет обоснования единственности ответа	3 балла
Замечено, что $Q(1)$, $Q(3)$, $Q(5)$ и $Q(7)$ — корни $P(x)$.	2 балла

Задача 4. В окружность ω вписан пятиугольник $ABCDE$, в котором $BC = CD$. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I , биссектрисы треугольника CDE — в точке J . Докажите, что если четырёхугольник $AIIJ$ — трапеция, то эта трапеция равнобедренная

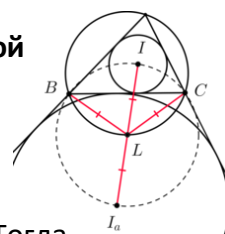
Решение. Пусть прямая AI пересекает ω в точке X , а прямая EJ — в точке Y . Поскольку $BC = CD$, то $\angle BDC = \angle DBC$, значит, равны меньшие дуги BC и CD . Тогда равны и их половины, что вместе с леммой о трезубце означает равенство шести отрезков: $XI = XB = XC = YC = YD = YJ$, откуда $XI = YJ$.

В случае $AI \parallel EJ$ мы получаем, что $IXYJ$ — параллелограмм, поскольку в нем стороны IX и JY равны и параллельны. Тогда $IJ = XY = AE$, последнее равенство следует из параллельности хорд AX и EY .

В случае $IJ \parallel AE$ имеем равенств углов: $\angle XII = \angle XAE = 180^\circ - \angle XYJ$, поэтому четырёхугольник $JIXY$ — вписанный. Поскольку в нем равны стороны IX и JY , то $XY \parallel IJ \parallel AE$. Следовательно, $AX = EY$, а тогда и $AI = EJ$, что и требовалось.

Лемма о трезубце, также называемая **леммой о трилистнике** и **леммой Мансиона**

Пусть у треугольника ABC точка I — центр вписанной окружности, точка I_a — центр внеписанной окружности, противоположной вершине A , а точка L — точка пересечения отрезка II_a с дугой описанной окружности (см. справа). Тогда точка L равноудалена от I , I_a , B и C .



Критерии.

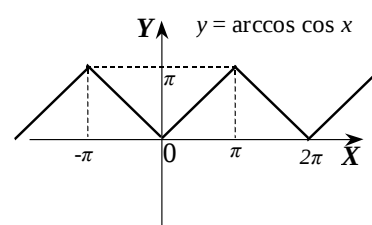
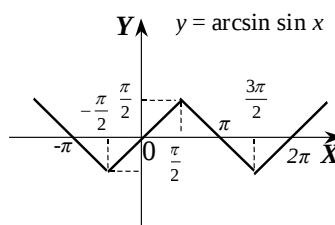
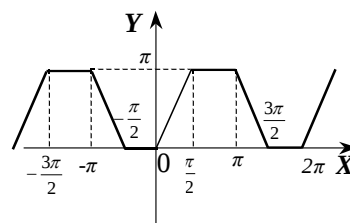
Лемма считается известной, можно применять без доказательства.

Доказано равенство отрезков $XI = YJ$, дальше нет продвижений	2 балла
Рассмотрен и доказан только один из случаев параллельности	4 балла

Задача 5. Постройте график функции $y = \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x)$.

Ответ: см. рис.

Решение. На рисунках изображены отдельно графики функций $y = \arcsin(\sin x)$ и $y = \arccos(\cos x)$. Заметим, что каждая функция периодична с периодом 2π и определена на всей оси. Сложив их, получаем в качестве ответа график, изображенный на итоговом рисунке.



Критерии.

Ответ без обоснования	3 балла
Упоминание того, что итоговый график периодичен (даже без указания периода)	1 балл
Упоминание того, что искомая функция определена на всей оси	1 балл
Изображены правильно графики функций $y = \arcsin(\sin x)$ и $y = \arccos(\cos x)$ (одной из них или обоих)	3 балла
Нет промежуточных графиков, а график $y = \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x)$ изображен неверно, но представляет собой кусочно линейную периодическую функцию	2 балла