

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ 2024–2025 уч. г.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 7 КЛАСС.

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ.

Задача 1. Двадцать жуков и пауков встали в хоровод, строго чередуясь (-жук-паук-жук-паук...). Каждый паук стоит на четырех лапках, а остальными держит соседей (одна лапка держит ровно одну лапку соседа). Каждый жук тоже стоит на каком-то количестве лапок, а остальными тоже держит соседей. Известно, что все жуки стоят на одинаковом количестве лапок. На скольких лапках стоит жук? У каждого паука 8 лапок, а у жука – 6 лапок.

Ответ: на двух.

Решение. Всего в хороводе 10 пауков и 10 жуков. У пауков 80 лапок, при этом на 40 лапках они стоят, а 40 лапок в сумме отдают жукам. У жуков всего 60 лапок, при этом 40 лапок держат пауков, итого для стояния остаются 20 лапок на 10 жуков. Отсюда получаем, что каждый жук стоит на двух лапках.

Критерии.

Ответ без обоснования	1 балл
Арифметические ошибки или описки, возможно, приведшие к неправильному ответу при правильном ходе решения	Снимаем 1 балл
Если в решении используются какие-то конкретные примеры, например, каждый паук держит каждого соседа двумя лапками	3 балла

Задача 2. Назовем дату тройной, если её можно записать в виде $ab.ab.ab$ (например, 12.12.12, 11.11.11 или 04.04.04 – тройные даты). Назовем дату симметричной, если её можно записать как $ab.cd.abcd$ (например, 20.12.2012 – симметричная дата). Может ли случиться, что симметричная дата произойдет ровно посередине между двумя последовательными тройными датами?

Ответ: нет.

Решение. Пусть две последовательные тройные даты произошли в одно столетие. Тогда между ними ровно 1 год, 1 месяц и 1 день. Получаем, что симметричная дата должна отстоять от каждой на полгода и несколько дней. Но при этом она происходит в один год с одной из тройных. Раз у них совпадают две последние цифры, то совпадает и месяц, то есть они происходят в один и тот же год и месяц, что невозможно. Если же тройные даты принадлежат разным столетиям, то более ранняя – это 12.12.12, а более поздняя – 01.01.01. Но тогда между ними примерно 89 лет, поэтому середина придется на 50-е годы. А в эти годы симметричная дата невозможна, месяц должен совпадать с номером года.

Критерии.

Если рассмотрен только один случай из двух (когда две даты в одно столетие или в разные столетия)	3 балла
Арифметические ошибки при вычислении средней даты, если школьник всё же это делает	Снимаем 1 балл
Если школьник использует факт, что все месяцы содержат одинаковое число дней	0 баллов

Упомянут факт, что две последовательные симметричные даты в одном столетии отстоят на 1 год, 1 месяц и 1 день без других продвижений	1 балл
Упомянут факт, что две последовательные симметричные даты в разных столетиях – это 12.12.12 и 01.01.01 без других продвижений	1 балл
Считать точные середины нет необходимости (точно так же, как и точные года).	

Задача 3. 1 ноября в магазин перед открытием привезли 2024 килограмма картофеля. Каждый рабочий день в магазине продают ровно половину имеющегося картофеля, а ночью выкидывают испорченный картофель, который составляет ровно треть от оставшегося к закрытию магазина. В какой день в магазине к открытию не окажется даже 1 кг картошки, если новых поставок не будет?

Ответ: 7 ноября.

Решение. Заметим, что за день убывает $\frac{2}{3}$ картофеля, то есть остается $\frac{1}{3}$. (сначала продают $\frac{1}{2}$, а потом выкидывают $\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$, то есть $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$). Поэтому задача сводится к тому, чтобы узнать, на какую наименьшую степень тройки надо разделить 2024, чтобы частное оказалось меньше 1. Осталось заметить, что $3^6 = 729 < 2024 < 3^7 = 2187$.

Критерии.

Ответ без обоснования	2 балла
Арифметические ошибки или описки, возможно, приведшие к неправильному ответу при правильном ходе решения	Снимаем 2 балла
Приведено решение с полными подсчетами – что происходит после каждой операции каждый день.	
Если в таком решении нет арифметических ошибок	7 баллов
Если есть арифметические ошибки	3 балла

Задача 4. Можно ли разбить числа от 1 до 2024 на пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре записывалась с помощью не более чем двух цифр? (в разных парах можно использовать разные цифры).

Ответ: да.

Решение. Числа от 1 до 1198 разобьем на пары следующим образом (1, 1198), (2, 1197), ... (599, 600). Сумма в каждой паре равна 1199. Числа от 1199 до 2024 разобьем на пары аналогичным образом (1199, 2024), (1200, 2023) ... (1611, 1612). Сумма в каждой паре равна 3223.

Критерии.

Могут быть другие примеры! Надо проверять то, что написано в работе!	
Правильный пример с проверкой или иным доказательством, что пример подходит	7 баллов
Правильный пример без проверки или доказательства	6 баллов
Арифметические ошибки или описки, возможно, приведшие к тому, что пример неверен, но он легко корректируется до верного	3 балла
Ответ «возможно» без обоснования	0 баллов

Задача 5. Из шахматной доски 8×8 удалили центральный квадрат 4×4. Можно ли обойти оставшуюся фигуру ходом шахматного коня, побывав ровно по одному разу на каждой клетке и последним ходом вернувшись на начальную клетку?

Ответ: нет, нельзя.

Решение. На первом рисунке цифра, стоящая в клетке, означает количество ходов, которые может сделать конь, стоящий в этой клетке. Заполнена только часть доски, так как оставшаяся часть заполняется в силу симметрии. Цифра «2» означает, что с этой клеткой ходом коня связаны только две клетки, т.е. путь коня строится однозначно – с одной из них он запрыгивает на данную клетку, а на другую выпрыгивает.

Так как путь замкнут, то началом можно считать любую клетку, пусть это будет левый верхний угол. На втором рис. эта клетка обозначена цифрой 1. Второй ход (без ограничения общности) конь делает на клетку 2. Уйти с клетки 2 он может разными способами. Но если конь следующим ходом не пойдет на клетку 3, то он в дальнейшем может попасть на эту клетку только с клетки 4, а уйти ему будет некуда. Значит, с клетки 2 необходимо идти на клетку 3, а потом – на клетку 4. Аналогично далее траектория

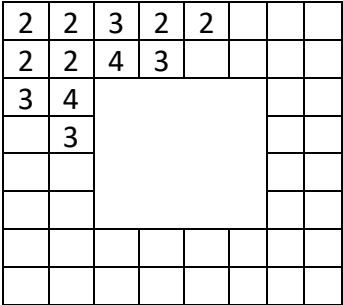


Рис. 1

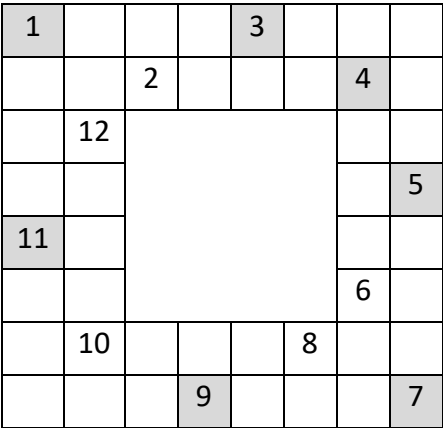


Рис. 2

следующим должен встать на клетку 1, т.е. закончить путь, при этом многие клетки оказались пропущенными.

На рисунке 2 серым покрашены клетки, из которых всего 2 хода. Значит, если конь стоит на белой клетке, с которой ведет ход на серую, ему надо обязательно сходить на серую, а с серой – только один выход. Так как у нас серые – каждая вторая на траектории, то траектория однозначна

Критерии.

На рисунке показана единственно возможная траектория, начиная с любой клетки, нет обоснования, почему она единственно возможная	5 баллов
На рисунке показана ЧАСТЬ единственно возможной траектории (часть не замкнута)	3 балла
Идея рассмотрения угла без дальнейших продвижений	2 балла
Идея рассмотрения любой клетки, откуда только 2 возможных хода	2 балла
Ответ «нельзя» без обоснования	0 баллов