

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ 2024–2025 уч. г.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 8 КЛАСС.

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ.

Задача 1. Можно ли разбить числа от 1 до 2024 на пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре записывалась только с помощью четверок, нулей и единиц?

Ответ: нет.

Решение. Рассмотрим число 1500. Ближайшее к нему и большее него число, состоящее только из цифр 0, 1, 4, – 4000. Но получения 4000 необходимо к 1500 прибавить 2500, а такое число использовать нельзя.

Критерии.

Возможны иные обоснования, например, можно взять другие числа вместо 1500.

Ответ «нельзя» без обоснования	0 баллов
Арифметические ошибки при обосновании, которые можно исправить без нарушения логики решения	4 балла
В решении используются какие-то конкретные примеры	0 баллов

Задача 2. График дежурств составляется при условии, что каждый день, кроме субботы и воскресения, дежурит один человек, каждый дежурит ровно один раз. Пятеро детей высказали пожелания, чтобы их дежурства проходили следующим образом. Петя хочет дежурить в среду или понедельник, Дима – в среду или четверг, Андрей – в понедельник или четверг, Саша и Коля оба хотят во вторник или в пятницу. Сколькими способами можно составить график дежурств, чтобы выполнить все пожелания?

Ответ: 4 способа.

Решение. Если Петя дежурит в среду, то в понедельник хочет дежурить только Андрей, тогда четверг остается для Димы. Если же Петя дежурит в понедельник, то в среду придется ставить дежурство Димы, а в четверг – Андрей. Итого эти трое ребят занимают понедельник, среду и четверг двумя способами. При каждом из этих вариантов существует еще два варианта распределения Саши и Коли на вторник и пятницу.

Критерии.

Ответ без обоснования и примера	1 балл
Ответ «4» с правильными примерами распределения дежурств, без обоснования, почему нет других вариантов	4 балла
Неверный ответ, при этом есть один, два или три верных примера дежурств	0 баллов
Есть ответ и нарисованы циклы Петя-Дима-Андрей и Саша-Коля, других обоснований нет	2 балла
Перепутаны имена мальчиков, остальное верно	Снимаем 1 балл

Задача 3. На склад поступило несколько ящиков апельсинов. В один из магазинов было отправлено 20% ящиков, во второй магазин – 52 ящика, а всем остальным магазинам досталось по $\frac{1}{7}$ от общего количества ящиков. Сколько магазинов получили апельсины со склада?

Ответ: 5 магазинов.

Решение. Заметим, что общее число ящиков делится и на 5, и на 7. Обозначим его через $35n$. Тогда в первый магазин попало $7n$ ящиков, а в остальные, кроме второго, по $5n$ ящиков. Значит, во второй магазин могло попасть $35n - 7n - 5n = 23n$, $35n - 7n - 10n = 18n$, $13n$, $8n$ или $3n$ ящиков (в зависимости от того, сколько магазинов). Так как второй магазин получил 52 ящика, то 52 должно быть равно $23n$, $18n$, $13n$, $8n$ или $3n$. Число 52 не делится на 23, 18, 8 или 3, остается один вариант, $52 = 13n$, $n = 4$. Тогда ящиков всего $35 \cdot 4 = 140$, в первый магазин ушло 28 ящиков, во второй – 52, на остальные осталось $140 - 28 - 52 = 60$ ящиков, а каждый получил по 20. Итого остальных магазинов 3, а всего магазинов 5.

Критерии.

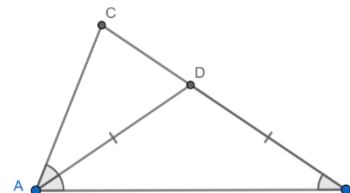
Ответ без обоснования и примера	1 балл
Арифметические ошибки, не повлиявшие на ход решения	Снимаем 2 балла
При переборе случаев, если упущен один из них, считаем это случайностью или опiskой.	Снимаем 2 балла
При переборе случаев, если упущено два или более случая – нарушение логики перебора.	Не более 3 баллов
Ответ и верный пример на 5 магазинов	2 балла
Верно составлено количество ящиков в целом (упомянута делимость на 35), описано количество ящиков в первом и втором магазине	2 балла

Задача 4. В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла B . Докажите, что по крайней мере две из сторон этого треугольника длиннее его биссектрисы, проведенной из вершины A .

Решение. Пусть AD — биссектриса. В треугольнике ADB оба угла DAB и DBA равны половине угла CAB , откуда $AD = DB$. Заметим, что BD — часть стороны BC , поэтому $AD < BC$.

Теперь рассмотрим два треугольника – ACD и ABD . Заметим теперь, что один из двух смежных углов ADC или ADB не меньше 90° . Против него в соответствующем треугольнике (ACD или ABD) лежит наибольшая сторона — AC или AB соответственно, и она будет больше AD .

Другой вариант продолжения решения. Докажем, что всегда выполнено неравенство $AD < AB$. Действительно, $\angle CAB + \angle CBA = 3\angle CBA < 180^\circ$, откуда $\angle CBA = \angle DAB < 60^\circ$. Поэтому угол ADB — наибольший в треугольнике ADB , откуда $AB > AD$.



Критерии.

Доказана половина задачи, а именно что биссектриса AD меньше какой-то одной стороны. Доказательство про другую сторону неверно или отсутствует	4 балла
Доказано, что треугольник ADB равнобедренный, других продвижений нет	2 балла

Есть чертеж, на котором отмечено, что $\angle DAB = \angle DBA$, отмечены равные стороны, более ничего не сказано.	1 балл
---	--------

Задача 5. Пусть числа a, b, c отличны от нуля и таковы, что $a^3+ab+b^3 = a^2+b^2$ и $b^3+bc+c^3 = b^2+c^2$. Докажите, что $a = c$.

Решение. $a^3+ab+b^3 - a^2-b^2 = (a+b)(a^2-ab+b^2) - (a^2-ab+b^2) = (a+b-1)(a^2-ab+b^2) = 0$. Заметим, что $a^2-ab+b^2 = (a - 0,5b)^2 + 0,75b^2 > 0$, поэтому, так как произведение скобок равно нулю, то равна нулю первая скобка, то есть $a+b = 1$. Аналогично из второго выражения получаем, что $b+c = 1$. Сравнивая оба эти равенства, получаем, что $a = c$.

Критерии.

Получено разложение $(a+b-1)(a^2-ab+b^2)$ или аналогичное для b и c	3 балла
Декларируется, используется, но не доказано, что $a^2-ab+b^2 > 0$	Снимаем 2 балла