

**ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО МАТЕМАТИКЕ 2024–2025 уч. г.
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП. 9 КЛАСС.**

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ.

Задача 1. Упростите выражение $\frac{x^2\sqrt{y}-y^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

Ответ: $\sqrt{xy}(x + \sqrt{xy} + y)$

Решение. $\frac{x^2\sqrt{y}-y^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}(x\sqrt{x}-y\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}((\sqrt{x})^3-(\sqrt{y})^3)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \sqrt{xy}(x + \sqrt{xy} + y).$

Критерии.

Проверять ОДЗ не надо!

Ответ «нельзя» без преобразований	0 баллов
Ошибки в алгебраических формулах, вне зависимости от того, привели они к неверному ответу или нет	0 баллов

Задача 2. Назовем число хорошим, если оно после вычитания 25 делится на 31, а после вычитания 31 делится на 25. Найдите наименьшее хорошее число.

Ответ: 831.

Решение. Хорошее число при вычитании $31+25 = 56$ делится сразу и на 25, и на 31. Наименьшее такое число – это НОК (25, 31) = 775. Прибавляя к нему 56, получим ответ 831.

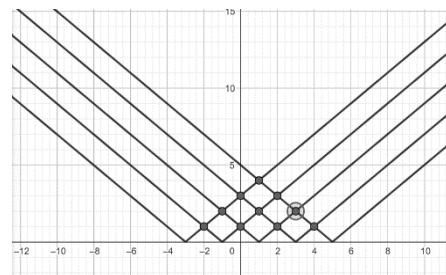
Критерии.

Ответ без обоснований (в том числе ответ с проверкой)	1 балл
Вместо упоминания НОК сразу используется произведение чисел 25 и 31, ответ тот же	Снимаем 1 балл
Арифметические ошибки при правильном ходе решения	Снимаем 2 балла

Задача 3. Назовем «галочкой» график функции $y = |x-a|$, a – некоторое произвольное число. Найдите, сколько точек пересечения может быть у 10 различных «галочек».

Ответ: 45.

Решение. У каждой «галочки» две ветки. Левая параллельная прямой $y = -x$, а правая параллельная прямой $y = x$. Следовательно, пересекаться могут только правая и левая ветви разных «галочек». Посмотрим на самую левую «галочку». Её правая ветвь пересекает все остальные левые ветви, итого 9 точек. Возьмем вторую слева «галочку», на её правой ветке будет 8 точек и так далее. Ответ $9+8+7+\dots+1+0=45$ точек.



Критерии.

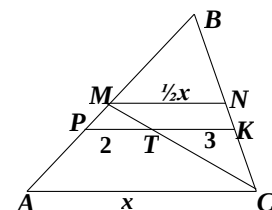
Ответ без обоснований	2 балла
-----------------------	---------

Ответ без обоснования, но с нарисованным примером на 10 прямых (подсчет на картинке)	3 балла
Верно нарисовано несколько «галочек» (в том числе важно, что вершина «галочки» находится на оси абсцисс), нет других продвижений	1 балл
Нарисованы галочки, не пояснено, какие стороны кому параллельны, но правильно сделан подсчет	Снимаем 2 балла, ставится 5 баллов
Арифметические ошибки при подсчете суммы $9+8+7+\dots+1+0=45$	Снимаем 1 балл

Задача 4. В треугольнике ABC CM – медиана, точки P и K лежат на сторонах AB и BC соответственно, причем PK параллельно AC . Отрезки PK и CM пересекаются в точке T , $PT = 2$, $TK = 3$. Найдите, чему равна сторона AC .

Ответ: $AC = 8$.

Решение. Проведем среднюю линию MN . Если $AC = x$, то $MN = \frac{1}{2}x$. Обозначим Тогда из подобия треугольников PMT и AMC имеем $\frac{2}{x} = \frac{PT}{AC} = \frac{MT}{CM}$, а из подобия треугольников TKC и MNC имеем $\frac{\frac{x}{2}}{3} = \frac{x}{6} = \frac{MN}{TK} = \frac{CM}{TC}$. Перемножим эти равенства $\frac{2}{x} \cdot \frac{x}{6} = \frac{MT}{CM} \cdot \frac{CM}{TC}$, тогда $\frac{1}{3} = \frac{MT}{TC}$, откуда MT составляет $\frac{1}{4}$ от AC . Тогда из треугольника AMC получаем, что $AC = 8$.



Критерии.

Ответ без обоснований	1 балл
Арифметические ошибки при правильном ходе решения	Снимаем 1 балл
Алгебраические ошибки при правильном ходе решения (при преобразованиях) и правильно выписанных подобиях	5 баллов
Неправильное применение теоремы Фалеса	0 баллов
Ошибки при написании подобий при правильно показанных подобных треугольниках, отсюда неверный ответ	3 балла

Задача 5. В ряд стоит n очень больших бочек. В первой бочке 1 л молока, во второй 3 л и т.д., в последней – $2n-1$ л молока. Винни-Пух может перелить в любую бочку из другой столько молока, сколько там уже есть. Выливать из бочки молоко куда-то еще, кроме других бочек, нельзя, также нельзя переливать из одной бочки в другую молоко, если в первой бочке не хватает молока для удвоения во второй. При каких n данными операциями можно собрать все молоко в одной бочке?

Ответ: $n=2^k$.

Решение. Сначала заметим, что в сумме в бочках находится $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$ литров молока. Пусть n – не степень 2. Тогда у числа n есть нечетный простой делитель p , при этом есть бочки, в которых налито количество молока, не кратное p (например, 1 л). В итоге во всех бочках, кроме одной, должно стать по 0 литров, а в одной – n^2 , т.е. в каждой бочке количество молока будет кратно p .

Рассмотрим первый момент, когда исчезла последняя бочка, не кратная p . Это либо бочка, в которую переливали, либо из которой переливали. В первой из бочек количество молока удвоилось и стало кратно p , но p – нечетно, поэтому и до этого количество литров было кратно p . Рассмотрим бочку, из

которой выливали молоко. Оттуда вылили количество молока, кратное p , значит, оно до этого тоже было кратно p , что противоречит тому, что исчезла последняя бочка, не кратная p .

Теперь докажем, что при $n=2^k$ можно все молоко слить в одну бочку. Для этого докажем, что мы можем постоянно увеличивать степень 2, на которую делятся ВСЕ бочки. Пусть у нас есть нечетные бочки. Тогда их всего четное количество. Разобьем их на пары произвольным способом, и в каждой паре из большей бочки выльем всё в меньшую. В ней останется четное число литров (может быть, ноль), в меньшей бочке станет четное число литров. Когда все бочки стали четными, мысленно разделим количество литров в них на 2 и снова сделаем ту же операцию. Так можно делать до тех пор, пока n делится на 2. В итоге в каждой бочке количество литров будет кратно 2^k , поэтому все молоко будет в одной бочке.

Критерии.

Факт, что сумма нечетных подряд идущих чисел равна точному квадрату, считается известным.

Ответ без обоснований	1 балл
Ответ и доказательство того, что при $n \neq 2^k$ невозможно это слить молоко в одну бочку	3 балла
Ответ и алгоритм, как при $n = 2^k$ слить всё молоко в одну бочку. Алгоритм должен быть доказан	4 балла
Ответ и алгоритм, как при $n = 2^k$ слить всё молоко в одну бочку. Алгоритм описан, но не доказано, что он работает	3 балла
Арифметические ошибки при подсчете суммы $9+8+7+\dots+1+0=45$	Снимаем 1 балл